

Natürliche Zahlen

In diesem Lernbereich erweitern die Schülerinnen und Schüler ihre Kompetenzen im Umgang mit den natürlichen Zahlen. Dabei liegt ein Fokus auf dem Erkennen und Nutzen von Mustern innerhalb der natürlichen Zahlen. Die Grundrechenarten und ihre Umkehrungen werden in alltagsrelevanten Zahlenräumen sicher angewendet. Das Bestimmen von Teilern und Vielfachen bereitet den späteren Umgang mit Brüchen und Termen vor.

Es geht nicht um eine abstrakte Behandlung und Darstellung der geltenden Regeln und Gesetze, die dann auswendig gelernt und formal angewendet werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen Eigenschaften der natürlichen Zahlen erkunden, ihre Erkenntnisse formulieren und anhand geeigneter Beispiele begründen können.

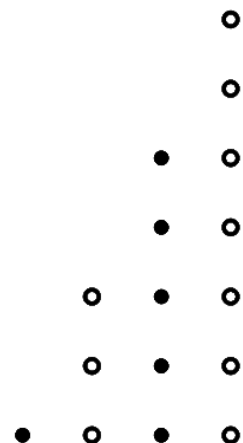
Bildliche Darstellungen von natürlichen Zahlen fördern vielfach die Durchdringung der mathematischen Zusammenhänge. Gleichzeitig haben sie einen hohen Aufforderungscharakter, bieten spielerische und selbstdifferenzierende Zugänge und verstärken so das bei Schülerinnen und Schülern dieser Altersstufe oftmals ohnehin vorhandene Interesse an Zahlen.

Im Folgenden wird an einem Beispiel gezeigt, wie Vielfache und Teiler von natürlichen Zahlen erarbeitet werden können.

Figurierte Zahlen gibt es in unzähligen Variationen. Sie sind sehr geeignet, Eigenschaften natürlicher Zahlen zu untersuchen. Dabei werden auch Folgen und Reihen betrachtet, ohne diese jedoch zu formalisieren.

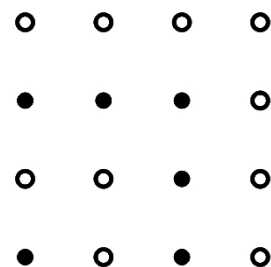
Ein Beispiel sind die sogenannten Dreieckszahlen der ungeraden Zahlen in der nebenstehenden Abbildung. Sie ermöglichen zunächst einfache Fragen:

Wie erhält man die jeweils folgende Dreieckszahl?
Wie viele Plättchen (Kugeln, Kreise...) benötigt man, um die ersten 8 Dreieckszahlen zu legen?
Welche Zahlen entstehen, wenn man mit zwei Plättchen beginnt oder jeweils drei Plättchen zufügt?



Die Plättchen der Dreieckszahlen der ungeraden Zahlen lassen sich auch zu je einem Quadrat umsortieren und ermöglichen weiterführende Fragen:

Wie viele Plättchen benötigt man für ein $6 \cdot 6$ -Quadrat?
Kann man jede Quadratzahl in dieser Form durch Dreieckszahlen darstellen?
Lässt sich die Summe zweier Quadratzahlen wieder als Quadratzahl darstellen?



Die beiden letzten Fragen führen zu Rechteckzahlen als Darstellung von Vielfachen und Teilern von natürlichen Zahlen:

Die Summe der beiden Quadratzahlen 16 und 4 ist keine Quadratzahl, sondern 20.

Offensichtlich ist nicht jede Zahl als Quadratzahl darstellbar. Hier kann die Frage anknüpfen, in welcher Weise man Zahlen als Rechteckzahlen darstellen kann.

Wie viele verschiedene Darstellungen gibt es beispielsweise für die Zahl 20?

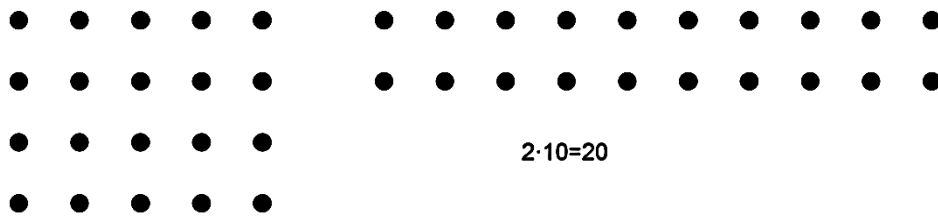
Die Zahl 20 lässt sich auf drei Arten als Produkt darstellen:

$$20 = 4 \cdot 5$$

$$20 = 2 \cdot 10$$

$$20 = 1 \cdot 20$$

Es gibt also folgende Rechteckdarstellungen:



$$4 \cdot 5 = 20$$

$$2 \cdot 10 = 20$$



$$1 \cdot 20 = 20$$

Die Zahl 20 hat die Teiler 1, 2, 4, 5, 10 und 20.

Umgekehrt ist 20 ein Vielfaches der Zahlen 1, 2, 4, 5, 10 und 20.

Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass sich Primzahlen nur auf eine Weise als Rechteckzahlen darstellen lassen.

Fragen nach Teilern und Vielfachen vertiefen die Kompetenz im Umgang mit den natürlichen Zahlen:

$$4 \text{ ist ein Teiler von } 20, \text{ denn } 20 : 4 = 5 .$$

$$20 \text{ ist ein Vielfaches von } 4, \text{ denn } 20 = 4 \cdot 5 .$$

Zur vollständigen Betrachtung gehören auch Gegenbeispiele der Art: „Ist 6 ein Teiler von 20?“.

$$6 \text{ ist kein Teiler von } 20, \text{ denn } 20 : 6 = 3 + 2 : 6$$

$$20 \text{ ist kein Vielfaches von } 6, \text{ denn } 20 = 3 \cdot 6 + 2$$

Hier werden Multiplikation und Division als Umkehroperationen verdeutlicht und weitere Einsichten in die Strukturen natürlicher Zahlen angelegt.

Prozessbezogene Kompetenzbereiche

3.1.4 Mathematische Darstellungen verwenden

• nutzen unterschiedliche Darstellungsformen für positive rationale Zahlen.		
---	--	--

3.1.5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

• stellen einfache mathematische Beziehungen durch Terme, auch mit Platzhaltern, dar und interpretieren diese.		
• berechnen die Werte einfacher Terme.		
• übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt.		
• verwenden die Relationszeichen („=“, „<“, „>“, „≤“, „≥“ und „≈“) sachgerecht.		
• nutzen die Umkehrung der Grundrechenarten.		

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche

3.2.1 Zahlen und Operationen

• untersuchen natürliche und nicht-negative rationale Zahlen, auch im Hinblick auf Teiler und Vielfache.		
• stellen nicht-negative rationale Zahlen auf verschiedene Weisen und situationsangemessen dar.		
• ordnen und vergleichen nicht-negative rationale Zahlen.		
• lösen einfache Rechenaufgaben mit nicht-negativen rationalen Zahlen im Kopf.		
• beschreiben Sachverhalte durch Zahlterme.		
• beschreiben die Struktur von Zahltermen.		