

### Geradengleichungen im Zweidimensionalen in Parameter-, Normalen- und Koordinatenform:

Hier geht es darum, die in der Sekundarstufe II behandelten Formen der Geradengleichung mit der aus früheren Schuljahrgängen bekannten Form, nämlich mit  $y = m \cdot x + n$ , zu vernetzen. Diese lässt sich nur für Geraden verwenden, die nicht zur y-Achse parallel sind. Außerdem lässt sich diese Form nicht übertragen auf Geraden im dreidimensionalen Raum.

Ist  $P = (x; y)$  ein allgemeiner Punkt auf der Geraden, so ist

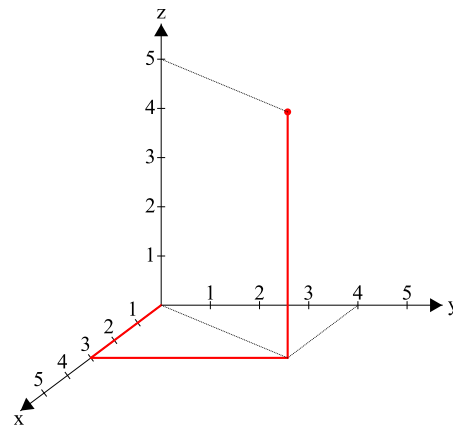
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ m \cdot x + n \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \text{ die zugehörige Parameterform.}$$

Die Geradengleichung  $y = m \cdot x + n$  lässt sich auch schreiben als  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = n$ ; dies ist die zugehörige Normalenform.

Die Gleichung  $-m \cdot x + y = n$  ist die zugehörige Koordinatenform.

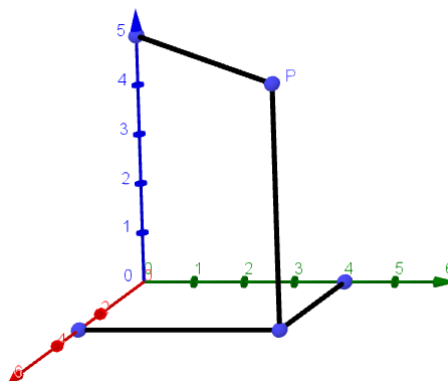
### Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen:

Zeigt die x-Achse nach vorn, die y-Achse nach rechts und die z-Achse nach oben, so bekommt man ein *Schrägbild* eines Punktes  $P = (u; v; w)$ , indem man  $v$  und  $w$  unverzerrt einträgt und die x-Koordinate  $u$  verkürzt nach vorn einträgt. Das Bild zeigt die Vorgehensweise für den Punkt  $P = (3; 4; 5)$ .



Wie erzeugt man das letzte Bild in GeoGebra?

Zunächst muss man in Einstellungen/Erweitert/Eigenschaften 3D/Projektion einstellen, dass ein *Schrägbild* erzeugt werden soll. Dann gibt man den Punkt P als  $P(3,4,5)$  ein.



Zur Abbildung:

Der Punkt  $(1; 0; 0)$  wird auf den Punkt  $(a; b)$  abgebildet, wobei  $a$  und  $b$  davon abhängen, unter welchem Winkel die  $x$ -Achse gegenüber der  $y$ -Achse abgebildet werden soll und wie die Verkürzung sein soll. Die Punkte  $(0; 1; 0)$  und  $(0; 0; 1)$  werden auf  $(1; 0)$  bzw.  $(0; 1)$

abgebildet. Genau das leistet die Matrix  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$  wegen  $\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline a & 1 & 0 & a \\ b & 0 & 1 & b \end{array}$  sowie  $\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \end{array}$

und  $\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \end{array}$  bzw. wegen  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  sowie  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt  $P = (3; 4; 5)$  wird mit der Matrix  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$  wegen

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & 4 \\ & & & 5 \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \end{array} \text{ bzw. wegen } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ auf den Punkt}$$

$$P' = \left( -\frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5; -\frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \right) = (2,5; 4) \text{ abgebildet.}$$

Zur Realisierung in GeoGebra:

Durch  $OP = \text{vektor}(P)$  wird aus dem Punkt  $P$  der zugehörige Ortsvektor in Spaltenschreibweise. Die Matrix gibt man als

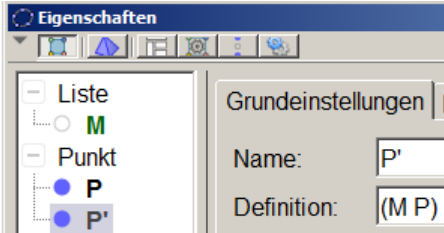
$$M = \left\{ \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 0 \right\}, \left\{ -\frac{1}{3}, 0, 1 \right\} \right\}$$

ein (oder über die Tabelle). Mit  $M \cdot OP$  bekommt man den Punkt (!!!)  $(2,5; 4)$ . Auch der matrizentheoretisch eigentlich unsinnige Befehl  $M \cdot P$  führt zu  $(2,5; 4)$ :

$P = (3, 4, 5)$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P' = (2,5, 4)$



The screenshot shows the 'Eigenschaften' (Properties) window in GeoGebra. The window title is 'Eigenschaften'. It has a toolbar with various icons. Below the toolbar, there is a tree view showing the object hierarchy: 'Liste' (List) containing 'M' (Matrix) and 'Punkt' (Point) containing 'P' and 'P'' (Point). The 'Definition' field is set to '(M P)'. The 'Name' field is set to 'P''.



Darstellung des letzten Bilds mit GeoGebra:

Man gibt zunächst die Punkte ein als

$$O = (0,0), A = (3, 4)/5, B = (4, -3)/5, C = (3, 1),$$

dann die (Orts-)Vektoren als

$$u = \text{Vektor}(A), v = \text{Vektor}(B), w = \text{Vektor}(C).$$

Mit

$$s = u^*w \text{ und } t = v^*w$$

liefert der Aufruf

$$s^*u + t^*v$$

dann den Vektor w.

